# 2 SISTEMI DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA

## 2.1 Normalni sistemi diferencijalnih jednačina

Neka je data funkcija $F : D \longrightarrow R$ gde $D \subseteq R^{n+2}$. Tada implicitna jednačina

$$(*)_1 \qquad F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

po jednoj nepoznatoj funkciji

$$y = y(x) : (\alpha, \beta) \longrightarrow R$$

se naziva *implicitno zadana diferencijalna jednačina $n$-tog reda po jednoj promenljivoj $x \in (\alpha, \beta)$*. *Ukoliko je moguće* prethodnu diferencijalnu jednačinu $(*)$ razmatramo u ekvivaletnom *normalnom obliku*:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}),$$

za neku funkciju $f : D_1 \longrightarrow R$ gde $D_1 \subseteq R^{n+1}$. Ako je $n = 1$ normalan oblik se podudara sa eksplicitnim oblikom diferencijalne jednčine prvog reda: $y' = f(x, y)$.

**Primer 2.1.** *Diferencijalna jednačina drugog reda:*

$$F(x, y, y', y'') = (y'')^2 - y' + y^2 - 3x + 4 = 0$$

*rešavanjem po najvišem izvodu $y''$ daje dve mogućnosti:*

$$y'' = \sqrt{y' - y^2 + 3x - 4}$$

*ili*

$$y'' = -\sqrt{y' - y^2 + 3x - 4}.$$

*Ovaj primer pokazuje da nema svaka implicitno zadana diferencijalna jednačina ekvivalentan normalan oblik.*

*Opšti sistem diferencijalnih jednačina* je sistem od $n$ jednačina po $n$ nepoznatih funkcija $y_1 = y_1(x), \dots, y_n = y_n(x) : (\alpha, \beta) \longrightarrow R$ dat u obliku konjukcije jednačina:

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{c} F_1(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(m_1)}, y_2, y_2', \dots, y_2^{(m_2)}, \dots, y_n, y_n', \dots, y_n^{(m_n)}) = 0, \\ F_2(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(m_1)}, y_2, y_2', \dots, y_2^{(m_2)}, \dots, y_n, y_n', \dots, y_n^{(m_n)}) = 0, \\ \vdots \\ F_n(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(m_1)}, y_2, y_2', \dots, y_2^{(m_2)}, \dots, y_n, y_n', \dots, y_n^{(m_n)}) = 0; \end{array} \right\}$$

za zadate funkcije $F_1, F_2, \ldots, F_n : D_2 \longrightarrow R$ gde $D_2 \subseteq R^{m+n+1}$ $(m = m_1 + m_2 + \ldots + m_n)$. Nama su nadalje od interesa samo sistemi koji se mogu zapisati u obliku ekvivalentnog *kanonskog normalnog sistema diferencijalnih jednačina*:

$$(2)\qquad \left\{ \begin{aligned} y_1^{(m_1)} &= \varphi_1(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(m_1-1)}, \ldots\ldots, y_n, y_n', \ldots, y_n^{(m_n-1)}),\\ y_2^{(m_2)} &= \varphi_2(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(m_1-1)}, \ldots\ldots, y_n, y_n', \ldots, y_n^{(m_n-1)}),\\ &\vdots\\ y_n^{(m_n)} &= \varphi_n(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(m_1-1)}, \ldots\ldots, y_n, y_n', \ldots, y_n^{(m_n-1)}); \end{aligned} \right\}$$

za zadate funkcije $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n : D_3 \longrightarrow R$ gde $D_3 \subseteq R^{m+1}$ $(m = m_1 + m_2 + \ldots + m_n)$. Pri tom u prethodnom sistemu najviši izvodi posmatranih funkcija su sa leve strane jednakosti u (2).

**Teorema 2.2.** *Svaki kanonski normalan sistem diferencijalnih jednačina* (2) *se može transformisati do ekvivalentnog sistema diferencijalnih jednačina*:

$$(3)\qquad \left\{ \begin{aligned} y_1' &= f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_m),\\ y_2' &= f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_m),\\ &\vdots\\ y_m' &= f_m(x, y_1, y_2, \ldots, y_m); \end{aligned} \right\}$$

*za zadate funkcije* $f_1, f_2, \ldots, f_m : D_4 \longrightarrow R$ *gde* $D_4 \subseteq R^{m+1}$.

Sistem (2.1) nazivamo *normalni sistem diferencijalnih jednačina.*

**Zadatak 1.** *U ovom konkretnom slučaju za implicitno zadani sistem*:

$$(i)\qquad \left\{ \begin{aligned} F_1(x, y_1, y_1', y_1'', y_2, y_2', y_2'') &= \boldsymbol{y_1''} - y_1' - y_1 + y_2' + y_2 + x = 0,\\ F_1(x, y_1, y_1', y_1'', y_2, y_2', y_2'') &= y_1' - y_1 + \boldsymbol{y_2''} - y_2' + y_2 - x^2 = 0; \end{aligned} \right\}$$

*moguće je najviše izvode* $\boldsymbol{y_1''}$ *i* $\boldsymbol{y_2''}$ *izraziti preko nižih izvoda (i kao što je rečeno samo sa takvim sistemima radimo). U ovom jednostavnom primeru posmatrajmo kanonski normalni sistem diferencijalnih jednačina koji je ekvivalentan polaznom sistemu*:

$$(ii)\qquad \left\{ \begin{aligned} \boldsymbol{y_1''} &= \varphi_1(x, y_1, y_1', y_2, y_2') = y_1' + y_1 - y_2' - y_2 - x,\\ \boldsymbol{y_2''} &= \varphi_2(x, y_1, y_1', y_2, y_2') = -y_1' + y_1 + y_2' - y_2 + x^2. \end{aligned} \right\}$$

*Primetimo da se u prethodnom sistemu sa desne strane jednakosti javlja ukupno* $m_1 = 2$ *polaznih* $y$*-promenljivih i ukupno* $m_2 = 2$ *izvoda tih promenljivih, pa uvođenjem sveukupno* $m = m_1 + m_2 = 4$ *novih* $z$*-promenljivih*[*)]:

$$(iii)\qquad \boldsymbol{z_1 = y_1,\ z_2 = y_1',\ z_3 = y_2,\ z_4 = y_2'}$$

*dobijamo normalni sistem koji je ekvivivalentan polaznom sistemu*:

$$(iv)\qquad \left\{ \begin{aligned} \boldsymbol{z_1'}\,(= y_1') &= \boldsymbol{f_1(z_1, z_2, z_3, z_4)} \underset{(iii)}{=} \boldsymbol{z_2},\\ \boldsymbol{z_2'}\,(= y_1'') &= \boldsymbol{f_2(z_1, z_2, z_3, z_4)} \underset{(ii),\,(iii)}{=} \boldsymbol{z_2 + z_1 - z_4 - z_3 - x},\\ \boldsymbol{z_3'}\,(= y_2') &= \boldsymbol{f_3(z_1, z_2, z_3, z_4)} \underset{(iii)}{=} \boldsymbol{z_4}\\ \boldsymbol{z_4'}\,(= y_2'') &= \boldsymbol{f_4(z_1, z_2, z_3, z_4)} \underset{(ii),\,(iii)}{=} \boldsymbol{-z_2 + z_1 + z_4 - z_3 + x^2}. \end{aligned} \right\}$$

□

[*)] *opšte upustvo*: svako $y_i$ preimenovati u $z_r$ za novi indeks $r = r(i)$ i svako javljanje izvoda $y_i^{(j)}$ preimenovati u $z_s$ za novi indeks $s = s(i, j)$

U daljem razmatranju od interesa će biti samo normalni sistemi diferencijalnih jednačina dati sa (2.1). Te sisteme

$$
(*) \qquad \left\{ \begin{array}{l} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_m), \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_m), \\ \quad \vdots \\ y_m' = f_m(x, y_1, y_2, \ldots, y_m); \end{array} \right\}
$$

možemo zapisati i u *matričnom obliku*:

$$
[*] \qquad \begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_m' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_m) \\ f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_m) \\ \vdots \\ f_m(x, y_1, y_2, \ldots, y_m) \end{bmatrix},
$$

i definicije koje navodimo takođse odnose i na tako zapisane sisteme.

Sistemi diferencijalnih jednačina se razmatraju u *normalnom obliku* određenom sa konjukcijom jednačina:

$$
(*) \qquad \left\{ \begin{array}{l} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_m), \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_m), \\ \quad \vdots \\ y_m' = f_m(x, y_1, y_2, \ldots, y_m); \end{array} \right\}
$$

za zadate funkcije $f_1, f_2, \ldots, f_m : D \longrightarrow R$ gde $D \subseteq R^{m+1}$.

**Definicija 2.3.** Rešenje normalnog sistema diferencijalnih jednačina $(*)$ *je niz diferencijabilnih funkcija*:

$$
y_1 = y_1(x), \ldots, y_m = y_m(x) : (\alpha, \beta) \longrightarrow R
$$

*za koje posmatrani sistem diferencijalnih jednačina predstavlja tačnu listu (konjukciju) jednakosti koje svaka za sebe ispunjene za svako* $x \in (\alpha, \beta)$. *Tada smatramo da je vektorska funkcija*

$$
\vec{y} = [\,y_1, \ldots, y_m\,]^T,
$$

*rešenje matrično zapisanog sistema* $(*)$.

**Definicija 2.4.** Opšte rešenje sistema diferencijalnih jednačina $(*)$ *jeste niz funkcija*

$$
(**) \qquad \left\{ \begin{array}{l} y_1 = y_1(x) = \varphi_1(x, C_1, \ldots, C_m) : (\alpha, \beta) \longrightarrow R, \\ \quad \vdots \\ y_m = y_m(x) = \varphi_m(x, C_1, \ldots, C_m) : (\alpha, \beta) \longrightarrow R; \end{array} \right.
$$

*za konstante* $C_1, \ldots, C_m \in \overline{R}$, *takve da važi uslovi*:

**1.** *Niz funkcija dat sa* $(**)$ *jeste rešenje normalnog sistema diferencijalnih jednačina* $(*)$ *za ma koji izbor konstanti.*

**2.** *Normalan sistem diferencijalnih jednačina* $(*)$ *je povezan sa opštim rešenjem* $(**)$ *u slećem smislu. Za svako* $(x_0, y_1^{(0)}, \ldots, y_m^{(0)}) \in D$ *sistem jednačina*

$$(**)_0 \qquad \begin{cases} \varphi_1(x_0, C_1, \ldots, C_m) = y_1^{(0)}, \\ \vdots \\ \varphi_m(x_0, C_1, \ldots, C_m) = y_m^{(0)}; \end{cases}$$

*ima jedinstveno rešenje po konstantama*

$$(C)_0 \qquad \begin{cases} C_1 = C_1^{(0)} = \psi_1(x_0, y_1^{(0)}, \ldots, y_m^{(0)}), \\ \vdots \\ C_m = C_m^{(0)} = \psi_m(x_0, y_1^{(0)}, \ldots, y_m^{(0)}), \end{cases}$$

*za neke funkcije* $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_m : D \longrightarrow R$, *gde* $D \subseteq R^{m+1}$ *i za tačku* $x_0 \in (\alpha, \beta)$, *tako da pri izboru* $x = x_0$ *funkcije* $(**)$ *ispunjavaju* $(**)_0$.

**Definicija 2.5.** Partikularno rešenje *rešenje sistema diferencijalnih jednačina* $(*)$ *je rešenje koje se dobija iz opšteg za specijalan izbor konstanti. Sistem jednačina* $(**)_0$ *nazivamo* sistem Košijevih uslova, *a ono partikularno rešenje koje ga ispunjava nazivamo* Košijevo rešenje.

**Definicija 2.6.** Singularno rešenje *sistema diferencijalnih jednačina* $(*)$ *je rešenje koje se ne može dobiti iz opšteg ni jedan izbor konstanti.*

**Definicija 2.7.** Integralna kriva *je svako partikularno ili singularno rešenje sistema diferencijalnih jednačina* $(*)$.

**Postupak svođenja normalnog sistema diferencijalnih jednačina na diferencijalnu jednačinu $m$-tog reda (i prateće međuveze).** U ovom delu izlažemo jedan postupak svođenja normalnog sistema diferencijalnih jednačina $(*)$ na jednu diferencijalnu jednačinu $m$-tog reda po promenljivoj $y_1$ i određivanje veza ostalih funkcija $y_2, \ldots, y_m$ sa $y_1$. Navedeno izvodimo pod *dodatnom pretpostavkom* koja će biti navedena u postupku koji izlažemo. Polazimo od prve jednačine:

$$y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_m).$$

Za drugi izvod $y_1''$ (po $x$) važi:

$$y_1'' = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f_1}{\partial y_k} y_k'$$

i sa obzirom da:

$$y_k' = f_k(x, y_1, y_2, \ldots, y_m),$$

za $k = 1, 2, \ldots, m$, odatle zaključujemo:

$$y_1'' = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f_1}{\partial y_k} f_k(x, y_1, y_2, \ldots, y_m) = F_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_m),$$

za neku funkciju $F_2$. Dalje, za treći izvod $y_1'''$ (po $x$) važi:

$$y_1''' = \frac{\partial F_2}{\partial x} + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial F_2}{\partial y_k} y_k'$$

i sa obzirom da:

$$y_k' = f_k(x, y_1, y_2, \dots, y_m),$$

za $k = 1, 2, \dots, m$, odatle zaključujemo:

$$y_1''' = \frac{\partial F_2}{\partial x} + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial F_2}{\partial y_k} f_k(x, y_1, y_2, \dots, y_m) = F_3(x, y_1, y_2, \dots, y_m),$$

za neku funkciju $F_3$. Nastavljajući započet proces kao posledicu normalnog sistema diferencijalnih jednačina $(*)$ dobijamo *izvodni normalni sistem po* $y_1$:

$$(*)' \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} y_1' & = & f_1(x, y_1, y_2, y_3, \dots, y_m), \\ y_1'' & = & F_2(x, y_1, y_2, y_3, \dots, y_m), \\ \vdots & & \\ y_1^{(m-1)} & = & F_{m-1}(x, y_1, y_2, y_3, \dots, y_m), \\ \boldsymbol{y_1^{(m)}} & \boldsymbol{=} & \boldsymbol{F_m(x, y_1, y_2, y_3, \dots, y_m)}; \end{array} \right\}$$

za prethodno određene funkcije $f_1, F_2, \dots, F_m : D \longrightarrow R$ gde $D \subseteq R^{m+1}$. *Dodatno pretpostavljamo*:

*izvodni normalni sistem* $(*)'$ *dopušta da se iz prvih* $(m-1)$ *jednačina sistema funkcije* $y_2, y_3, \dots, y_m$ *mogu redom funkcijski izraziti preko* $x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(m-1)}$;

tj. postoje funkcije $\varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_m$ takve da su njima određene međuveze:

$$(*)^\dagger \qquad \left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{y_2} = \varphi_2(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(m-1)}), \\ \boldsymbol{y_3} = \varphi_3(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(m-1)}), \\ \vdots \\ \boldsymbol{y_m} = \varphi_m(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(m-1)}). \end{array} \right\}$$

Ukoliko bi zamenili $\boldsymbol{y_2}, \boldsymbol{y_3}, \dots, \boldsymbol{y_m}$ iz $(*)^\dagger$ u poslednju jednačinu sistema $(*)'$ dobijamo:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y_1^{(m)}} &\boldsymbol{= F_m(x, y_1, y_2, y_3, \dots, y_m)} \\ &= F_m(x, y_1, \varphi_2(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(m-1)}), \varphi_3(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(m-1)}), \dots, \varphi_m(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(m-1)})) \\ &\boldsymbol{= f(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(m-1)})}, \end{aligned}$$

za neku funkciju $\boldsymbol{f}$. Ovim je dat jedan postupak svođenja normalnog sistema na jednu diferencijalnu jednačinu $m$-tog reda po $y_1$, uz određivanje međuveza između $y_2, y_3, \dots, y_m$ i $y_1$ sa $(*)^\dagger$. Prva posledica prethodnog postupka je korektnost navođenja tačno $m$ konstanti u Definiciji 2.4. $\big($nije neophodno navoditi $m$ puta po $m$ raznih konstanti za svaku $\varphi_i$ funkciju $(i = 1, \dots, m)\big)$.

**Zadatak 2.** *Rešiti sistem diferencijalnih jednačina*:

$$y_1' = y_2,$$

$$y_2' = -y_1.$$

**Rešenje.** Primenjujemo prethodno opisani postupak. Diferenciramo prvu jednačinu po $x$ i dobijamo:

$$y_1'' = y_2'.$$

Zamenom $y_2' = -y_1$ iz druge jednačine dobijamo:

$$L_2[y_1] = y_1'' + y_1 = 0.$$

Opšte rešenje ove homogene linearne diferencijalne jednačine sa konstantnim koeficijentima drugog reda je funkcija:

$$y_1 = C_1 \cos x + C_2 \sin x,$$

gde su $C_1$ i $C_2$ konstante. Na osnovu prve jednačine $y_2 = y_1'$ nalazimo:

$$y_2 = -C_1 \sin x + C_2 \cos x.$$

Sveukupno, opšte rešenje posmatranog sistema je dato sa:

$$\begin{cases} y_1 = \varphi_1(x, C_1, C_2) = C_1 \cos x + C_2 \sin x, \\ y_2 = \varphi_2(x, C_1, C_2) = -C_1 \sin x + C_2 \cos x; \end{cases}$$

za $x \in R$ i $C_{1,2}$ realne konstante. Napomenimo da se upotrebom elementarne trigonometrije može pretpostaviti i ovakav zapis opšteg rešenja:

$$\begin{cases} y_1 = \phi_1(x, A, \alpha) = A \sin(x + \alpha), \\ y_2 = \phi_2(x, A, \alpha) = A \cos(x + \alpha); \end{cases}$$

ukoliko realne konstante $A$ i $\alpha$ se mogu izraziti preko realnih konstanti $C_1$ i $C_2$, tako da:

$$\begin{cases} y_1 = A \sin(x + \alpha) = \underbrace{A \sin \alpha}_{(=C_1)} \cos x + \underbrace{A \cos \alpha}_{(=C_2)} \sin x = C_1 \cos x + C_2 \sin x, \\ y_2 = A \cos(x + \alpha) = \underbrace{A \cos \alpha}_{(=C_2)} \cos x - \underbrace{A \sin \alpha}_{(=C_1)} \sin x = C_2 \cos x - C_1 \sin x. \end{cases}$$

Generalno, za svake dve *nenula* konstante $C_1$ i $C_2$ postoji tačno jedan ugao $\alpha$ takav da

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{A \sin \alpha}{A \cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha\,,$$

tj.

$$\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{C_1}{C_2}\right).$$

Za takav ugao $\alpha \neq 0, \frac{\pi}{2}$ važi

$$\frac{C_1}{\sin \alpha} = \frac{C_2}{\cos \alpha}$$

i tim količnikom je određen tačno jedan realan broj

$$A = \frac{C_1}{\sin \alpha} = \frac{C_2}{\cos \alpha}\,.$$

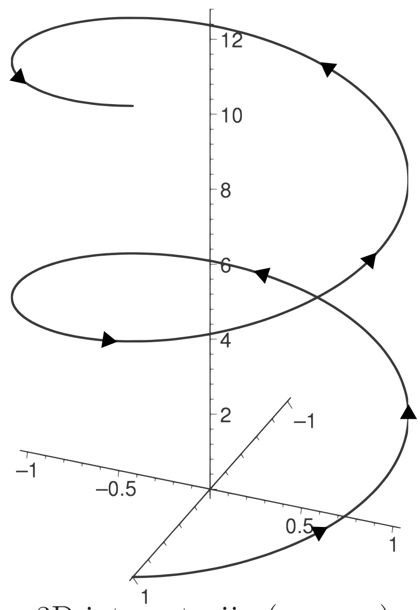
Tada u $Oy_1y_2$ ravni važi:

$$y_1^2 + y_2^2 = A^2\,.$$

Promenljiva $x$ ostaje slobodna i pomoću nje možemo dati trodimenzionalnu intepretaciju. Integralna kriva sistema jednačina dopušta 3D intepretaciju

$$(y_1, y_2, x) = (A\sin(x+\alpha), A\cos(x+\alpha), x)$$

u $R^3$ za fiksirano $A \in R$ i $\alpha \in R$ i tekuće $x \in R$.




3D intepretacija $(y_1, y_2, x)$

□

**Zadatak 3.** *Naći Košijevo rešenje sistema diferencijalnih jednačina*:

$$y_1' = y_2,$$
$$y_2' = -y_1;$$

*pri početnim uslovima*:

$$\begin{cases} y_1(0) = 1, \\ y_2(0) = 2. \end{cases}$$

**Rešenje.** Prema Zadatku 2 opšte rešenje posmatranog sistema je:

$$\begin{cases} y_1 = \varphi_1(x, C_1, C_2) = C_1 \cos x + C_2 \sin x, \\ y_2 = \varphi_2(x, C_1, C_2) = C_2 \cos x - C_1 \sin x; \end{cases}$$

za $x \in R$ i $C_{1,2}$ proizvoljne realne konstante. Samim tim na osnovu početnih uslova:

$$\begin{cases} 1 = \varphi_1(0, C_1, C_2) = C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 = C_1, \\ 2 = \varphi_2(0, C_1, C_2) = C_2 \cos 0 - C_1 \sin 0 = C_2; \end{cases}$$

nalazimo konkretne realne vrednosti konstanti:

$$C_1 = 1, \; C_2 = 2.$$

Traženo Košijevo rešenje je dato sa:

$$\begin{cases} y_1 = y_1(x) = \cos x + 2\sin x, \\ y_2 = y_2(x) = 2\cos x - \sin x; \end{cases}$$

za $x \in R$. □

**Zadatak 4.** *Pokazati postojanje i jedinstvenost svakog Košijevog rešenja sistema diferencijalnih jednačina*:

$$y_1' = y_2,$$
$$y_2' = -y_1;$$

*pri početnim uslovima*:

$$\begin{cases} y_1(x_0) = y_1^{(0)}, \\ y_2(x_0) = y_2^{(0)}; \end{cases}$$

*za ma koje* $y_1^{(0)}, y_2^{(0)} \in R$.

**Rešenje.** Prema Zadatku 2 opšte rešenje posmatranog sistema je:

$$\begin{cases} y_1 = \varphi_1(x, C_1, C_2) = C_1 \cos x + C_2 \sin x, \\ y_2 = \varphi_2(x, C_1, C_2) = C_2 \cos x - C_1 \sin x; \end{cases}$$

za $x \in R$ i $C_{1,2}$ proizvoljne realne konstante. Samim tim na osnovu početnih uslova:

$$\begin{cases} y_1^{(0)} = \varphi_1(x_0, C_1, C_2) = C_1 \cos x_0 + C_2 \sin x_0, \\ y_2^{(0)} = \varphi_2(x_0, C_1, C_2) = -C_1 \sin x_0 + C_2 \cos x_0; \end{cases}$$

nalazimo da uvek postoje jedinstveno određene konkretne realne vrednosti konstanti:

$$\begin{cases} C_1 = \dfrac{y_1^{(0)} \cos x_0 - y_2^{(0)} \sin x_0}{\cos^2 x_0 + \sin^2 x_0} = y_1^{(0)} \cos x_0 - y_2^{(0)} \sin x_0, \\ C_2 = \dfrac{y_1^{(0)} \sin x_0 + y_2^{(0)} \cos x_0}{\cos^2 x_0 + \sin^2 x_0} = y_1^{(0)} \sin x_0 + y_2^{(0)} \cos x_0. \end{cases}$$

□

## 2.2 Postojanje i jedinstvenost rešenja

Neka je dat normalan sistem diferencijalnih jednačina:

$$(*) \qquad \left\{ \begin{array}{l} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_m), \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_m), \\ \vdots \\ y_m' = f_m(x, y_1, y_2, \ldots, y_m); \end{array} \right\}$$

za zadate funkcije $f_1, f_2, \ldots, f_m : D \longrightarrow R$, gde $D \subseteq R^{m+1}$.

Dalje, podsetimo se za normalni sistem diferencijalnih jednačina $(*)$ *Košijevo rešenje* je ono rešenje

$$\begin{cases} y_1 = y_1(x) = \varphi_1(x, C_1, \ldots, C_m) : (\alpha, \beta) \longrightarrow R, \\ \vdots \\ y_m = y_m(x) = \varphi_m(x, C_1, \ldots, C_m) : (\alpha, \beta) \longrightarrow R; \end{cases}$$

koje za neke konkretne realne vrednosti konstanti $C_1 = C_1^{(0)}, \dots, C_m = C_m^{(0)}$ ispunjava Košijeve početne uslove:

$$(**)\qquad \begin{cases} y_1(x_0) = \varphi_1(x_0, C_1^{(0)}, \dots, C_m^{(0)}) = y_1^{(0)}, \\ y_2(x_0) = \varphi_2(x_0, C_1^{(0)}, \dots, C_m^{(0)}) = y_2^{(0)}, \\ \vdots \\ y_m(x_0) = \varphi_m(x_0, C_1^{(0)}, \dots, C_m^{(0)}) = y_m^{(0)}; \end{cases}$$

za unapred zadanu tačku $x_0 \in (\alpha, \beta)$ i vrednosti $y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \dots, y_m^{(0)} \in R$. Navodimo sledeća dva tvrđenja o postojanju i jedinstvenosti normalnog sistema diferencijalnih jednačina. Naime, važi:

**Teorema 2.8. (Peanova teorema)** *Za normalan sistem* $(*)$ *neka je uvedena vektorska funkcija*:

$$F = F(x, y_1, \dots, y_m) = \begin{bmatrix} f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_m) \\ f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_m) \\ \vdots \\ f_m(x, y_1, y_2, \dots, y_m) \end{bmatrix} : D \longrightarrow R^m,$$

*za* $D \subseteq R^{m+1}$. *Ukoliko važi*:

1. *funkcija* $F$ *je neprekidna na* $D$,
2. $\Big(x_0, y_1^{(0)}, \dots, y_m^{(0)}\Big) \in D$,

*tada postoji Košijevo rešenje koje ispunjava uslove* $(**)$.

Da bi Košijevo rešenje bilo jedinstveno potrebno je pored prethodna dava uslova i dodati još jedan uslov koji se daje sa sledećim tvrđenjem.

**Teorema 2.9. (Pikarova teorema)** *Za normalan sistem* $(*)$ *neka je uvedena vektorska funkcija*:

$$F = F(x, y_1, \dots, y_m) = \begin{bmatrix} f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_m) \\ f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_m) \\ \vdots \\ f_m(x, y_1, y_2, \dots, y_m) \end{bmatrix} : D \longrightarrow R^m,$$

*za* $D \subseteq R^{m+1}$. *Ukoliko važi*:

1. *funkcija* $F$ *je neprekidna na* $D$,
2. $\Big(x_0, y_1^{(0)}, \dots, y_m^{(0)}\Big) \in D$,
3. *ispunjeno je*

$$\Big(\exists M > 0\Big)\Big(\forall (x, y_1, \dots, y_m) \in D\Big) \left| \frac{\partial f_i(x, y_1, \dots, y_m)}{\partial y_j} \right| \leq M,$$

*za* $i, j \in \{1, 2, \dots, m\}$;

*tada postoji jedinstveno Košijevo rešenje koje ispunjava uslove* $(**)$.

**Napomena 2.10.** *Umesto prethodnog uslova* **3.** *Pikarove toeoreme o ograničenosti svih parcijalnih izvoda* $\partial f_i(x, y_1, \dots, y_m)/\partial y_j$*, za* $i, j \in \{1, 2, \dots, m\}$*, može se zahtevati da važi i slabiji* Lipšicov uslov: $\Big(\exists L > 0\Big)\Big(\forall (x, y_1^{(1)}, \dots, y_m^{(1)}), (x, y_1^{(2)}, \dots, y_m^{(2)}) \in D\Big) \|F(x, y_1^{(1)}, \dots, y_m^{(1)}) - F(x, y_1^{(2)}, \dots, y_m^{(2)})\| \leq L \cdot \|(x, y_1^{(1)}, \dots, y_m^{(1)}) - (x, y_1^{(2)}, \dots, y_m^{(2)})\|$.

**Napomena 2.11.** *U praksi razmatramo po pravilu takve funkcije da su* $\partial f_i(x, y_1, \dots, y_m)/\partial y_j$*, za* $i, j \in \{1, 2, \dots, m\}$*, neprekidne funkcije na nekoj kompaktnoj oblasti* $D \subset R^{m+1}$ *i tada su ispunjeni uslovi Pikarove teoreme.*

**Teorema 2.12.** *Familija rešenja:*

$$\begin{cases} y_1 = y_1(x) = \varphi_1(x, C_1, \dots, C_m) : (\alpha, \beta) \longrightarrow R, \\ \vdots \\ y_m = y_m(x) = \varphi_m(x, C_1, \dots, C_m) : (\alpha, \beta) \longrightarrow R; \end{cases}$$

*određuje singularno rešenje ako i samo ako za svako* $(x_0, y_1^{(0)}, \dots, y_m^{(0)}) \in D$ *sistem jednačina*

$$\begin{cases} \varphi_1(x_0, C_1, \dots, C_m) = y_1^{(0)}, \\ \vdots \\ \varphi_m(x_0, C_1, \dots, C_m) = y_m^{(0)}; \end{cases}$$

*nema jedinstveno rešenje* $(C_1^{(0)}, \dots, C_m^{(0)}) \in R^{m+1}$ *Košijevog početnog uslova.*

Rešenju normalnog sistema diferencijalnih jednačina

$$\vec{y} = \vec{y}(x) = [y_1(x), \dots, y_m(x)]^T$$

za $x \in (\alpha, \beta)$ mogu se dati različita geometrijska tumačenja. Uobičajeno je da se vrši intepretacija vremenom $^{\sharp)}$ $x = t \in [\alpha, \beta]$ tada kriva

$$\Gamma = \{(t, \vec{y}(t)) \,|\, t \in [\alpha, \beta]\}$$

određuje *integralnu krivu* u prostoru $R_{t\vec{y}}^{m+1}$. Prostor $R_{\vec{y}}^{m}$ se naziva *fazni prostor*. Projekcija integralne krive na fazni prostor određuje *faznu trajektoriju*.

**Zadatak 5.** *Odrediti za sistem diferencijalnih jednačina:*

$$y_1' = y_2,$$
$$y_2' = -y_1.$$

*integralnu krivu i faznu trajektoriju.*

**Rešenje.** Prema Zadatku 2 rešenje

$$\begin{cases} y_1 = \phi_1(t, A, \alpha) = A \sin(t + \alpha), \\ y_2 = \phi_2(t, A, \alpha) = A \cos(t + \alpha); \end{cases}$$

određuje sa $(y_1, y_2, t)$ zavojnicu i njena projekcija na fazni prostor je fazna trajektorija kružnice:

$$y_1^2 + y_2^2 = A^2.$$

□

$^{\sharp)}$ uzimajući $t = \alpha$ za početnu tačku vremena i $t = \beta$ za završnu tačku vremena

## 2.3 Metode rešavanja

**1. Metoda eliminacije.** Ova metoda je opisana u postupku svođenja normalnog sistema na diferencijalnu jednačinu $m$-tog reda. Metodu smo razmatrali u prethodnom delu na jednom primeru jednostavnog homogenog linearnog sistema sa konstantnim koeficijentima formata 2×2. Ovu metodu ovde ilustrovaćemo na još par primera zadatka.

**Zadatak 6.** *Rešiti sledeće homogene linearne sisteme diferencijalnih jednačina sa sa konstantnim koeficijentima*:

(1)
$$\left\{ \begin{array}{l} x' = \phantom{-}6x - y \\ y' = -5x + 2y \end{array} \right\},$$

(2)
$$\left\{ \begin{array}{l} x' = 3x - y \\ y' = \phantom{3}x + y \end{array} \right\},$$

(3)
$$\left\{ \begin{array}{l} x' = -29x - 48y \\ y' = \phantom{-}16x + 27y \end{array} \right\},$$

(4)
$$\left\{ \begin{array}{l} x' = x \\ y' = y \end{array} \right\}.$$

**Rešenje.** ***(i)*** Polazeći od prve jednačine sistema (1) nalazimo

$$y = -x' + 6x.$$

Odatle, zamenom u drugu jednačinu sistema (1) datu sa

$$y' = -5x + 2y,$$

na osnovu

$$\begin{aligned} y' = -5x + 2y &\iff (-x' + 6x)' = -5x + 2\,(-x' + 6x) \\ &\iff -x'' + 6x' = -5x - 2x' + 12x, \end{aligned}$$

dobijamo homogenu linearnu diferencijalnu jednačinu $II$ reda sa konstantnim koeficjentima

$$L_2[x] = x'' - 8x' + 7x = 0,$$

sa opštim rešenjem po prvoj funkciji:

$$\boldsymbol{x = x(t) = C_1\, e^{t} + C_2\, e^{7t}}\,.$$

Na osnovu $y = -x' + 6x$ dobijamo opšte rešenje i po drugoj funkciji

$$\boldsymbol{y = y(t) = 5\, C_1\, e^{t} - C_2\, e^{t}}\,.$$

Konstante $C_1$ i $C_2$ su proizvoljne realne konstante.

***(ii)*** Polazeći od druge jednačine sistema (2) nalazimo

$$x = y' - y.$$

Odatle, zamenom u prvu jednačinu sistema (2) datu sa

$$x' = 3x - y,$$

na osnovu

$$\begin{aligned} x' = 3x - y &\iff (y' - y)' = 3(y' - y) - y \\ &\iff y'' - y' = 3y' - 3y - y, \end{aligned}$$

dobijamo homogenu linearnu diferencijalnu jednačinu $II$ reda sa konstantnim koeficjentima

$$L_2[y] = y'' - 4y' + 4y = 0,$$

sa opštim rešenjem po drugoj funkciji:

$$\boldsymbol{y = y(t) = C_1\, e^{2t} + C_2\, t\, e^{2t}}\,.$$

Na osnovu $x = y' - y$ dobijamo opšte rešenje i po prvoj funkciji

$$\boldsymbol{x = x(t) = (C_1 + C_2)\, e^{2t} + C_2\, t\, e^{2t}}\,.$$

Konstante $C_1$ i $C_2$ su proizvoljne realne konstante.

***(iii)*** Polazeći od prve jednačine sistema (3) nalazimo

$$y = \frac{1}{48}\,(-x' - 29x)\,.$$

Odatle, zamenom u drugu jednačinu sistema (3) datu sa

$$y' = 16x + 27y,$$

na osnovu

$$\begin{aligned} y' = 16x + 27y &\iff \left(\frac{1}{48}\,(-x' - 29x)\right)' = 16x + 27 \cdot \frac{1}{48}\,(-x' - 29x) \;\Big/^{\cdot 48} \\ &\iff -x'' - 29x' = (48 \cdot 16)x - 27x' - (27 \cdot 29)x \\ &\iff -x'' - 29x' = 768x - 27x' - 783x, \end{aligned}$$

dobijamo homogenu linearnu diferencijalnu jednačinu $II$ reda sa konstantnim koeficjentima

$$L_2[x] = -x'' - 2x' + 15x = 0,$$

sa opštim rešenjem prvoj funkciji:

$$\boldsymbol{x = x(t) = C_1\, e^{-3t} + C_2\, e^{5t}}\,.$$

Na osnovu $y = \dfrac{1}{48}\,(-x' - 29x)$ dobijamo opšte rešenje i po drugoj funkciji

$$\boldsymbol{y = y(t) = -\frac{1}{2}C_1 e^{-5t} - \frac{2}{3}C_2 e^{3t}}\,.$$

Konstante $C_1$ i $C_2$ su proizvoljne realne konstante.

***(iv)*** Važi

$$(4) \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} x' - x = 0 \\ y' - y = 0 \end{array} \right\}.$$

Odatle nalazimo opšta rešenja po prvoj i drugoj funkciji:

$$\boldsymbol{x = x(t) = C_1\, e^t}\,,$$

$$\boldsymbol{y = y(t) = C_2\, e^t}\,.$$

Konstante $C_1$ i $C_2$ su proizvoljne realne konstante. □

**Zadatak 7.** *Rešiti sledeći nehomogen linearni sistem diferencijalnih jednačina sa konstantnim koeficijentima*:

$$(5) \qquad \left\{ \begin{array}{l} x' = 2x - 4y \\ y' = \ \ x - 3y + t \end{array} \right\}.$$

**Rešenje.** Polazeći od druge jednačine sistema (5) nalazimo

$$x = y' + 3y - t.$$

Odatle, zamenom u prvu jednačinu sistema (5) datu sa

$$x' = 2x - 4y,$$

na osnovu

$$\begin{aligned} x' = 2x - 4y \Longleftrightarrow \quad & (y' + 3y - t)' = 2\,(y' + 3y - t) - 4y \\ \Longleftrightarrow \quad & y'' + 3y' - 1 = 2y' + 6y - 2t - 4y, \end{aligned}$$

dobijamo nehomogenu linearnu diferencijalnu jednačinu $II$ reda sa konstantnim koeficjentima

$$(*) \qquad L_2[y] = y'' + y' - 2y = -2t + 1.$$

Rešimo prvo homogenu linearnu diferencijalnu jednačinu $II$ reda sa konstantnim koeficjentima

$$(*)_H \qquad L_2[y] = y'' + y' - 2y = 0.$$

Na osnovu karakteristične jednačine $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$ i dve različite karakteristične vrednosti $\lambda_1 = 1$ i $\lambda_2 = -2$ nalazimo homogeno rešenje

$$y_h(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-2t}.$$

Dalje po metodi neodređenih koeficijenata tražimo partikularno rešenje u obliku

$$y_p(t) = A\,t + B\,,$$

za neke konstante realne $A$ i $B$ koje određujemo na osnovu:

$$\begin{aligned} (*)_P \quad & \Longleftrightarrow \quad y_p(t)'' + y_p(t)' - 2y_p(t) = -2t + 1 \\ & \Longleftrightarrow \quad 0 + A - 2(At + B) = -2t + 1 \;\Longleftrightarrow\; -2At + (A - 2B) = -2t + 1 \\ & \Longrightarrow \quad A = 1 \wedge B = 0\,. \end{aligned}$$

Samim tim konkretno partikularno rešenje po drugoj funkciji $y = y_p + y_h$ je

$$\boldsymbol{y = y(t) = t + C_1\, e^{t} + C_2\, e^{-2t}}\,.$$

Na osnovu $x = y' - 3y - t$ dobijamo opšte rešenje i po prvoj funkciji

$$\boldsymbol{x = x(t) = 2t + 1 + 4C_1\, e^{t} + C_2\, e^{-2t}}\,.$$

Konstante $C_1$ i $C_2$ su proizvoljne realne konstante. $\square$

**Formule svođenja nehomogenog linearnog sistema diferencijalnih jednačina formata $2\times 2$ sa konstantnim koeficijentima na diferencijalnu jednačinu *II* reda (i prateće međuveze).** Neka je dat nehomogen linearni sistema diferencijalnih jednačina formata $2\times2$ sa konstantnim koeficijentima:

$$(*)\qquad \left\{\begin{array}{l} x' = a\,x + b\,y \;+\; f,\\ y' = c\,x + d\,y \;+\; g; \end{array}\right\}$$

za nepoznate dva puta diferencijabilne funkcije $x = x(t), y = y(t) : (\alpha,\beta) \longrightarrow R$ i pri tom neka su $f = f(t), g = g(t) : (\alpha,\beta) \longrightarrow R$ zadate diferencijabilne funkcije i $a, b, c, d$ zadane realne konstante $\big((\alpha,\beta)\subseteq R\big)$. Imamo sledeće mogućnosti:

**1.** $\boldsymbol{b \neq 0}$. Tada važi

$$(*) \iff \left\{\begin{array}{c} x'' - (a+d)\,x' + (a\,d - b\,c)\,x = (f' + d\,f - b\,g)\,,\\ y = \dfrac{1}{b}\,(x' - a\,x - f)\,. \end{array}\right\}$$

**2.** $\boldsymbol{c \neq 0}$. Tada važi

$$(*) \iff \left\{\begin{array}{c} y'' - (a+d)\,y' + (a\,d - b\,c)\,y = (g' + a\,g - c\,f)\,,\\ x = \dfrac{1}{c}\,(y' - d\,y - g)\,. \end{array}\right\}$$

**3.** $\boldsymbol{b = 0 \,\wedge\, c = 0}$. Tada važi

$$(*) \iff \left\{\begin{array}{l} x' - a\,x = f,\\ y' - d\,y = g; \end{array}\right\}$$

čime se sistem se svodi na dve linearne diferncijalne jednačine sa eksplicitnim rešenjima

$$x = x(t) = \Big(C_1 + \int f(t)e^{-a\,t}\,dt\Big)e^{a\,t},$$
$$y = y(t) = \Big(C_2 + \int g(t)e^{-d\,t}\,dt\Big)e^{d\,t}.$$

**Zadatak 8.** *Rešiti sistem diferencijalnih jednačina*:

$$(1)\qquad y_1' = \frac{y_1^2}{y_2},$$

$$(2)\qquad y_2' = y_1.$$

**Rešenje.** Cilj je da posmatrani (nelinearni) normalni sistem dve diferencijalne jednačine svedemo na jednu (nelinearnu) diferencijalnu jednačinu drugog reda. Važi:

$$
\begin{aligned}
(2)' \qquad &\Longrightarrow \qquad y_2'' = y_1' \\
&\underset{(1)}{\Longrightarrow} \qquad y_2'' = \frac{y_1^2}{y_2} \\
&\underset{(2)}{\Longrightarrow} \qquad y_2'' = \frac{(y_2')^2}{y_2},
\end{aligned}
$$

pri tom iz (1) jasno je da $y_2 \neq 0$. U prethodnom postupku redukcijom dobijamo jednu diferencijalnu jednačinu drugog reda datu sa:

$$y_2'' = f(x, y_1, y_1') = \frac{(y_2')^2}{y_2}.$$

Generalno prethodna diferencijalna jednačina ne sadrži $x$ pa se rešava sa $p = y_2'$. Posebno *za slučaj ove konkretne nelinearne diferencijalne jednačine* drugog reda primetimo da važi sledeće:

$$y_2'' = \frac{(y_2')^2}{y_2} \Big/ \cdot y_2 \iff y_2''y_2 - (y_2')^2 = 0 \Big/ : y_2^2 \iff \frac{y_2'' \cdot y_2 - y_2' \cdot y_2'}{y_2^2} = \left(\frac{y_2'}{y_2}\right)' = 0 \implies \frac{y_2'}{y_2} = c_1;$$

za neku realnu konstantu $c_1$, pri čemu $y_2 \neq 0$. Samim tim dobijamo diferencijalnu jednačinu koja razdvaja promenljive:

$$y_2' = c_1 y_2 \iff \frac{dy_2}{dx} = c_1 y_2 \iff \frac{dy_2}{y_2} = c_1 dx,$$

sa rešenjem

$$\ln |y_2| = c_1 x + c_2;$$

za neku realnu konstantu $c_2$. Odatle imamo eksplicitno rešenje po drugoj funkciji:

$$y_2 = C_2\, e^{C_1 x},$$

za konstante $C_2 = \pm e^{c_2} \in R\backslash\{0\}$ i $C_1 = c_1 \in R$. Dalje na osnovu (2) $y_1 = y_2'$ nalazimo eksplicitno rešenje i po prvoj funkciji:

$$y_1 = C_2\, C_1\, e^{C_1 x}.$$

Sveukupno, *opšte rešenje sistema* je:

$$
\begin{cases}
\boldsymbol{y_1 = \varphi_1(x, C_1, C_2) = C_2\, C_1\, e^{C_1 x}}, \\
\boldsymbol{y_2 = \varphi_2(x, C_1, C_2) = C_2\, e^{C_1 x}};
\end{cases}
$$

za prethodne proizvoljne realne konstante $C_{1,2}$. □

**Zadatak 9.** *Rešiti sistem diferencijalnih jednačina:*

$$
(*) \qquad \left\{
\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= y - x, \\
\frac{dy}{dt} &= 4z - y, \\
\frac{dz}{dt} &= x - 4z.
\end{aligned}
\right\}
$$

**Rešenje.** Koristićemo kraći zapis izvoda $x' = \dfrac{dx}{dt}$, $y' = \dfrac{dy}{dt}$, $z' = \dfrac{dz}{dt}$ polazni sistem posmatramo u kao konjukciju tri jednačine:

$$x' = y - x, \tag{1}$$

$$y' = 4z - y, \tag{2}$$

$$z' = x - 4z. \tag{3}$$

Ideja je da formiramo homogenu linearnu diferencijalnu jednačinu $L_3[x] = 0$ i da odredimo međuveze $y$ i $z$ sa $x$. Jednostavno iz (1): $x' = y - x$ sleduje *prva međuveza*

$$y = x' + x. \tag{4}$$

Zamenimo $y$ iz (4) u (2): $y' = 4z - y$, čime dobijamo

$$\begin{aligned} y' = 4z - y &\iff (x' + x)' = 4z - (x' + x) \\ &\iff x'' + x' = 4z - x' - x \\ &\iff x'' + 2x' + x = 4z. \end{aligned}$$

Odatle sleduje *druga međuveza*

$$z = \frac{1}{4}\left(x'' + 2x' + x\right). \tag{5}$$

Zamenimo $z$ iz (5) u (3): $z' = x - 4z$, čime dobijamo

$$\begin{aligned} z' = x - 4z &\iff \left(\frac{1}{4}\left(x'' + 2x' + x\right)\right)' = x - 4\,\frac{1}{4}\,\left(x'' + 2x' + x\right) \Big/ ^{\cdot 4} \\ &\iff x''' + 2x'' + x' = 4x - 4x'' - 8x' - 4x \\ &\iff x''' + 6x'' + 9x' = 0. \end{aligned}$$

Time je određena *homogena linearna diferencijalna jednačina III reda po $x$ sa konstantnim koeficijentima*:

$$L_3[x] = x''' + 6x'' + 9x' = 0. \tag{6}$$

Zaključak prethodnog izvođenja je da za $x = x(t)$, $y = y'(t)$, $z = z(t)$ polazni sistem $(*)$ ekvivalentan sa sistemom:

$$\left\{ \begin{array}{l} L_3[x] = x''' + 6x'' + 9x' = 0, \\ y = x' + x, \\ z = \dfrac{1}{4}\left(x'' + 2x' + x\right). \end{array} \right\}$$

Nađimo opšte rešenje homogene linearne diferencijalne jednačine trećeg reda:

$$L_3[x] = x''' + 6x'' + 9x' = 0.$$

Karakteristična jednačina $\lambda^3 + 6\lambda^2 + 9\lambda = 0$ ima korene $\lambda_1 = 0$ i $\lambda_{2,3} = -3$. Odatle, opšte rešenje $L_3[x] = 0$ po funkciji $x = x(t)$ je:

$$x(t) = C_1 + C_2 e^{-3t} + C_3 t e^{-3t},$$

za proizvoljne realne konstante $C_{1,2,3}$. Opšte rešenje po funkciji $y = y(t)$ je:

$$\begin{aligned} y = x' + x &= (C_1 + C_2 e^{-3t} + C_3 t e^{-3t})' + (C_1 + C_2 e^{-3t} + C_3 t e^{-3t}) \\ &= (-3C_2 e^{-3t} + C_3 e^{-3t} - 3C_3 t e^{-3t}) + (C_1 + C_2 e^{-3t} + C_3 t e^{-3t}) \\ &= C_1 - 2C_2 e^{-3t} + C_3(1 - 2t)e^{-3t}, \end{aligned}$$

za prethodno izabrane realne konstante $C_{1,2,3}$. Opšte rešenje po funkciji $z = z(t)$ je:

$$\begin{aligned} z = \frac{1}{4}\left(x'' + 2x' + x\right) &= \frac{1}{4}\Big((C_1 + C_2 e^{-3t} + C_3 t e^{-3t})'' + 2\left(C_1 + C_2 e^{-3t} + C_3 t e^{-3t}\right)' \\ &\quad + (C_1 + C_2 e^{-3t} + C_3 t e^{-3t})\Big) \\ &= \frac{1}{4}\Big((-3C_2 e^{-3t} + C_3 e^{-3t} - 3C_3 t e^{-3t})' + 2\left(-3C_2 e^{-3t} + C_3 e^{-3t} - 3C_3 t e^{-3t}\right) \\ &\quad + (C_1 + C_2 e^{-3t} + C_3 t e^{-3t})\Big) \\ &= \frac{1}{4}\Big((9C_2 e^{-3t} - 3C_3 e^{-3t} - 3C_3 e^{-3t} + 9C_3 t e^{-3t}) + 2\left(-3C_2 e^{-3t} + C_3 e^{-3t} - 3C_3 t e^{-3t}\right) \\ &\quad + (C_1 + C_2 e^{-3t} + C_3 t e^{-3t})\Big) \\ &= \frac{1}{4}\Big(C_1 + \left(9e^{-3t} - 6e^{-3t} + e^{-3t}\right)C_2 + \left(-6e^{-3t} + 9te^{-3t} + 2e^{-3t} - 6te^{-3t} + te^{-3t}\right)C_3\Big) \\ &= \frac{1}{4}\Big(C_1 + \left(4e^{-3t}\right)C_2 + \left(-4e^{-3t} + 4te^{-3t}\right)C_3\Big) \\ &= \frac{1}{4}C_1 + e^{-3t}C_2 + (t-1)\,e^{-3t}C_3, \end{aligned}$$

za prethodne izabrane realne konstante $C_{1,2,3}$.

Sveukupno, opšte rešenje sistema je:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x = \varphi_1(t, C_1, C_2, C_3) = C_1 + C_2 e^{-3t} + C_3 t e^{-3t}}, \\ \boldsymbol{y = \varphi_2(t, C_1, C_2, C_3) = C_1 - 2C_2 e^{-3t} + C_3\,(1 - 2t)\,e^{-3t}}, \\ \boldsymbol{z = \varphi_3(t, C_1, C_2, C_3) = \frac{1}{4}C_1 + C_2 e^{-3t} + C_3\,(t-1)\,e^{-3t}}; \end{cases}$$

za proizvoljne realne konstante $C_{1,2,3}$. □

**2. Metoda prvih integrala.** Prelazimo na opisivanje ove metode. Neka je dat normalan sistem diferencijalnih jednačina:

$$(*) \qquad \left\{ \begin{aligned} y_1' &= f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_m), \\ y_2' &= f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_m), \\ &\vdots \\ y_m' &= f_m(x, y_1, y_2, \ldots, y_m); \end{aligned} \right\}$$

za zadate funkcije $f_1, f_2, \ldots, f_m : D \longrightarrow R$, gde $D \subseteq R^{m+1}$. Podsetimo se nekih pojmova.

Opšte rešenje normalnog sistema diferencijalnih jednačina (2.1) jeste niz funkcija

$$(**) \qquad \begin{cases} y_1 = y_1(x) = \varphi_1(x, C_1, \ldots, C_m) : (\alpha, \beta) \longrightarrow R, \\ \quad \vdots \\ y_m = y_m(x) = \varphi_m(x, C_1, \ldots, C_m) : (\alpha, \beta) \longrightarrow R; \end{cases}$$

za konstante $C_1, \ldots, C_m \in \overline{R}$, takve da važi uslovi:

**1.** Niz funkcija dat sa $(**)$ jeste rešenje normalnog sistema diferencijalnih jednačina $(*)$ za ma koji izbor konstanti.

**2.** Normalan sistem diferencijalnih jednačina $(*)$ je povezan sa opštim rešenjem $(**)$ u slećem smislu. Za svako $(x_0, y_1^{(0)}, \ldots, y_m^{(0)}) \in D$ sistem jednačina

$$\begin{cases} \varphi_1(x_0, C_1, \ldots, C_m) = y_1^{(0)}, \\ \qquad\qquad\qquad \vdots \\ \varphi_m(x_0, C_1, \ldots, C_m) = y_m^{(0)}; \end{cases}$$

ima jedinstveno rešenje po konstantama

$$(C)_0 \qquad \begin{cases} C_1 = C_1^{(0)} = \psi_1(x_0, y_1^{(0)}, \ldots, y_m^{(0)}), \\ \quad \vdots \\ C_m = C_m^{(0)} = \psi_m(x_0, y_1^{(0)}, \ldots, y_m^{(0)}); \end{cases}$$

za neke funkcije $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_m : D \longrightarrow R$, gde $D \subseteq R^{m+1}$ i za tačku $x_0 \in (\alpha, \beta)$, tako da funkcije

$$\begin{cases} y_1 = y_1(x) = \varphi_1(x, C_1^{(0)}, \ldots, C_m^{(0)}) : (\alpha, \beta) \longrightarrow R, \\ \quad \vdots \\ y_m = y_m(x) = \varphi_m(x, C_1^{(0)}, \ldots, C_m^{(0)}) : (\alpha, \beta) \longrightarrow R; \end{cases}$$

ispunjavaju:

$$(**)_0 \qquad \begin{cases} y_1(x_0) = \varphi_1(x_0, C_1^{(0)}, \ldots, C_m^{(0)}) = y_1^{(0)}, \\ y_2(x_0) = \varphi_2(x_0, C_1^{(0)}, \ldots, C_m^{(0)}) = y_2^{(0)}, \\ \vdots \\ y_m(x_0) = \varphi_m(x_0, C_1^{(0)}, \ldots, C_m^{(0)}) = y_m^{(0)}. \end{cases}$$

Dalje uvodimo neke nove pojmove.

**Definicija 2.13.** *Funkcija*

$$\psi = \psi(x, y_1, \ldots, y_m) : D \longrightarrow R,$$

*gde* $D \subseteq R^{m+1}$, *određuje* prvi integral normalnog sistema diferencijalnih jednačina $(*)$ *ukoliko za svako rešenje* $y_1 = y_1(x), \ldots, y_m = y_m(x)$ *(niz diferencijabilnih funkcija) je ispunjeno*:

$$\psi = \psi(x, y_1(x), \ldots, y_m(x)) = C - Const.$$

*za sve vrednosti* $x \in (\alpha, \beta)$.

**Definicija 2.14.** *Za normalan sistem diferencijalnih jednačina* $(*)$ *m prvih integrala*:

$$\begin{cases} \psi_1 = \psi_1(x, y_1, \ldots, y_m) : D \longrightarrow R, \\ \vdots \\ \psi_m = \psi_m(x, y_1, \ldots, y_m) : D \longrightarrow R; \end{cases}$$

*gde* $D \subseteq R^{m+1}$, *je* funkcionalno nezavisan u oblasti $D$ *ukoliko ne postoji funkcija* $F : R^m \longrightarrow R$ *takva da važi*:

$$F(\psi_1, \ldots, \psi_m) = 0,$$

*za svako* $(x, y_1, \ldots, y_m) \in D$.

**Primer 2.15.** *Sledeće funkcije*: $\psi_1 = \psi_1(x, y) = x^2 + y^2$, $\psi_2 = \psi_2(x, y) = x^4 + 2x^2y^2 + y^4 : R^2 \longrightarrow R$, *su funkcionalno zavisne jer postoji funkcija* $F = F(p, q) = p^2 - q : R^2 \longrightarrow R$ *takva da je za nju ispunjeno* $F(\psi_1, \psi_2) = \psi_1^2 - \psi_2 \equiv 0$.

**Teorema 2.16.** *Za normalan sistem diferencijalnih jednačina* $(*)$ *m prvih integrala*:

$$\begin{cases} \psi_1 = \psi_1(x, y_1, \ldots, y_m) : D \longrightarrow R, \\ \quad\vdots \\ \psi_m = \psi_m(x, y_1, \ldots, y_m) : D \longrightarrow R; \end{cases}$$

*gde* $D \subseteq R^{m+1}$, *je funkcionalno nezavisan u oblasti* $D$ *ako i samo za Jakobijevu determinantu važi*:

$$\frac{D(\psi_1, \ldots, \psi_m)}{D(y_1, \ldots, y_m)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial y_1} & \frac{\partial \psi_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial \psi_1}{\partial y_m} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial y_1} & \frac{\partial \psi_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial \psi_2}{\partial y_m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \psi_m}{\partial y_1} & \frac{\partial \psi_m}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial \psi_m}{\partial y_m} \end{vmatrix} \neq 0.$$

**Postupak rešavanja.** Za polazni sistem diferencijalnih jednačina $(*)$ neka je određeno $m$ *funkcionalno nezavisnih prvih integrala*:

$$\begin{cases} \psi_1(x, y_1, \ldots, y_m) = C_1, \\ \qquad\vdots \\ \psi_m(x, y_1, \ldots, y_m) = C_m, \end{cases}$$

gde su $C_1, \ldots, C_m$ su proizvoljne konstante. Prethodni sistem smatramo da određuje *implicitno zapisano opšte rešenje* polaznog sistema $(*)$. Na osnovu implicitno zapisanog opšteg rešenja, u nekim slučajevima je moguće i odrediti *eksplicitno zapisano opšte rešenje* u obliku $(**)$.

**Zadatak 10.** *Metodom prvih integrala rešiti sistem diferencijalnih jednačina*:

(1) $$y_1' = y_2,$$

(2) $$y_2' = y_1.$$

**Rešenje.** Pretpostavimo da su:

$$y_1 = y_1(x), y_2 = y_2(x) \text{ rešenja polaznog sistema diferencijalnih jednačina.}$$

Važi:

$$\begin{aligned}
(1)+(2) \quad &\Longrightarrow \quad y_1' + y_2' = (y_1+y_2)' = y_1 + y_2 \\
&\Longleftrightarrow \quad \frac{d(y_1+y_2)}{dx} = y_1 + y_2 \\
&\Longleftrightarrow \quad \frac{d(y_1+y_2)}{y_1+y_2} = dx \qquad\qquad (y_1+y_2 \neq 0) \\
&\Longleftrightarrow \quad \ln|y_1+y_2| = x + c_1,
\end{aligned}$$

za neku realnu konstantu $c_1$. Odatle nalazimo prvi integral (u prvoj verziji):

(3) $$\boldsymbol{\psi_1 = \psi_1(x, y_1, y_2) = (y_1+y_2)e^{-x} = C_1},$$

za neku realnu konstantu

$$C_1 = \pm e^{c_1} \in R \backslash \{0\}.$$

Analogno:

$$\begin{aligned}
(1)-(2) \quad &\Longrightarrow \quad y_1' - y_2' = (y_1-y_2)' = y_2 - y_1 \\
&\Longrightarrow \quad \frac{d(y_1-y_2)}{dx} = -(y_1 - y_2) \\
&\Longleftrightarrow \quad \frac{d(y_1-y_2)}{y_1-y_2} = -dx \qquad\qquad (y_1-y_2 \neq 0) \\
&\Longleftrightarrow \quad \ln|y_1-y_2| = -x + c_2,
\end{aligned}$$

za neku realnu konstantu $c_2$. Odatle nalazimo još jedan prvi integral (u drugoj verziji):

(4) $$\boldsymbol{\psi_2 = \psi_2(x, y_1, y_2) = (y_1-y_2)e^{x} = C_2},$$

za neku realnu konstantu

$$C_2 = \pm e^{c_2} \in R \backslash \{0\}.$$

*Prema prethodnom*

*funkcije $\psi_1 = \psi_1(x, y_1, y_2)$ i $\psi_2 = \psi_2(x, y_1, y_2)$ imaju konstantne vrednosti $C_1$ i $C_2$,*

*ukoliko su $y_1 = y_1(x)$, $y_2 = y_2(x)$ rešenja polaznog sistema ($x \in R$), i time su po definiciji prvi integrali.*

Dalje proverimo da su funkcije $\psi_1, \psi_2 : R^3 \longrightarrow R$ funkcionalno nezavisne. Navedeno je ispunjeno jer je tačno:

$$\frac{D(\psi_1,\psi_2)}{D(y_1,y_2)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial\psi_1}{\partial y_1} & \frac{\partial\psi_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial\psi_2}{\partial y_1} & \frac{\partial\psi_2}{\partial y_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y_1}\Big((y_1+y_2)e^{-x}\Big) & \frac{\partial}{\partial y_2}\Big((y_1+y_2)e^{-x}\Big) \\ \frac{\partial}{\partial y_1}\Big((y_1-y_2)e^{x}\Big) & \frac{\partial}{\partial y_2}\Big((y_1-y_2)e^{x}\Big) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{-x} & e^{-x} \\ e^{x} & -e^{x} \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

Rešavajući sistem prvih integrala (3) i (4):

$$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{(y_1+y_2)\, e^{-x} = C_1}, \\ \boldsymbol{(y_1-y_2)\, e^{x} = C_2}; \end{array} \right\}$$

po $y_1$ i $y_2$ dobijamo opšte rešenje:

$$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{y_1 = \frac{1}{2}C_1 e^{x} + \frac{1}{2}C_2 e^{-x}}, \\ \boldsymbol{y_2 = \frac{1}{2}C_1 e^{x} - \frac{1}{2}C_2 e^{-x}}; \end{array} \right\}$$

za $x \in R$. □

**Simetrični oblik normalnog sistema.** Neka je dat normalan sistem diferencijalnih jednačina:

$$(*)\qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_m), \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_m), \\ \vdots \\ \dfrac{dy_m}{dx} = f_m(x, y_1, y_2, \ldots, y_m); \end{array}\right\}$$

za zadate funkcije $f_1, f_2, \ldots, f_m : D \longrightarrow R$, gde $D \subseteq R^{m+1}$. Važi

$$\boldsymbol{(*) \iff \frac{dx}{1} = \frac{dy_1}{f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_m)} = \ldots = \frac{dy_m}{f_m(x, y_1, y_2, \ldots, y_m)}}.$$

Sistem u diferencijalnom obliku zapisan sa desne strane prethodne ekvivalencije se naziva *simetrični oblik normalnog sistema.*

U cilju rešavanja simetričnog oblika normalnog sistema koristimo proporcije brojeva. Naime, za realne brojeve $a$ i $b$ određujemo

$$\frac{a}{b} = t \iff a = b \cdot t\,,$$

za neko realno $t$. Na ovom mestu dodatno preciziramo slučaj da kada je $b=0$ da smatramo*) da je tada $a=0$ (inače ako bi dopustili da $a\neq 0$ došli bi do kontradikcije da je $t$ realan broj). Drugim rečima određujemo da u navedenom slučaju važi *pravilo zaključivanja*:

$$b = 0 \implies a = 0\,.$$

U cilju rešavanja simetričnog oblika normalnog sistema i izdvajanja prvih integrala polaznog sistema koriste se osobine proširenih brojevnih proporcija da ako je:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n} = t\,,$$

za neko realno $t$, tada za ma koje realne brojeve $k_1, k_2, \ldots, k_n$ važi:

$$\frac{k_1 a_1 + k_2 a_2 + \ldots + k_n a_n}{k_1 b_1 + k_2 b_2 + \ldots + k_n b_n} = t.$$

**Zadatak 11.** *Metodom prvih integrala rešiti sistem rešiti sistem diferencijalnih jednačina*:

$$(1)\qquad \frac{dy}{dx} = f_1(x, y, z) = \frac{x - z}{z - y},$$

$$(2)\qquad \frac{dz}{dx} = f_2(x, y, z) = \frac{y - x}{z - y}.$$

**Rešenje.** Polazni normalni sistem je zapisan sa $y_2 = y_2(x)$ i $y_1 = y_1(x)$ preimenovano sa:

$$z = y_2, \;\; y_1 = y.$$

Pretpostavimo da su:

$$y=y(x), z=z(x) \text{ rešenja polaznog sistema diferencijalnih jednačina.}$$

*) bez drugih tumačenja proporcije $a/b$

Važi

$$(1)\wedge(2) \iff \frac{dx}{1}=\frac{dy}{\frac{x-z}{z-y}}=\frac{dz}{\frac{y-x}{z-y}}$$

$$\iff \frac{dx}{1}=\frac{dy}{\frac{x-z}{z-y}}=\frac{dz}{\frac{y-x}{z-y}} \Big/ \cdot \frac{1}{z-y}$$

$$\iff \frac{dx}{z-y}=\frac{dy}{x-z}=\frac{dz}{y-x}=t \quad (\pi)$$

Koristeći se osobinama proširenih proporcija dobijamo:

$$(\pi) \implies \frac{d(1\cdot x+1\cdot y+1\cdot z)}{1\cdot(z-y)+1\cdot(x-z)+1\cdot(y-x)}=\frac{d(x+y+z)}{0}=t$$

$$\implies \psi_1=\psi_1(x,y,z)=x+y+z=C_1;$$

za neku realnu konstantu $C_1$. Ovim smo odredili prvi integral (u prvoj verziji):

(3) $$\boldsymbol{\psi_1=\psi_1(x,y,z)=x+y+z}=C_1$$

za neku realnu konstantu $C_1$.

Dalje, koristeći se osobinama proširenih proporcija dobijamo:

$$(\pi) \implies \frac{2x\,dx}{2x(z-y)}=\frac{2y\,dy}{2y(x-z)}=\frac{2z\,dz}{2z\,(y-x)}$$

$$\implies \frac{dx^2}{2x(z-y)}=\frac{dy^2}{2y(x-z)}=\frac{dz^2}{2z(y-x)}$$

$$\implies \frac{1\cdot dx^2+1\cdot dy^2+1\cdot dz^2}{1\cdot 2x(z-y)+1\cdot 2z(y-x)+1\cdot 2z(x-z)}=\frac{d\left(x^2+y^2+z^2\right)}{0}=t$$

$$\implies \psi_2=\psi_2(x,y,z)=x^2+y^2+z^2=C_2;$$

za neku realnu konstantu $C_2$. Ovim smo odredili prvi integral (u drugoj verziji):

(4) $$\boldsymbol{\psi_2=\psi_2(x,y,z)=x^2+y^2+z^2}=C_2$$

za neku realnu konstantu $C_2$.

Proverimo da su funkcije $\psi_1,\psi_2 : R^3 \longrightarrow R$ funkcionalno nezavisne. Navedeno je ispunjeno jer je tačno:

$$\frac{D(\psi_1,\psi_2)}{D(y,z)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial\psi_1}{\partial y} & \frac{\partial\psi_1}{\partial z}\\ \frac{\partial\psi_2}{\partial y} & \frac{\partial\psi_2}{\partial z}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial y}\Big(x+y+z\Big) & \frac{\partial}{\partial z}\Big(x+y+z\Big)\\ \frac{\partial}{\partial y}\Big(x^2+y^2+z^2\Big) & \frac{\partial}{\partial z}\Big(x^2+y^2+z^2\Big)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2y & 2z\end{vmatrix}=2(z-y)\neq 0.$$

Rešavajući sistem prvih integrala (3) i (4) :

$$\left\{\begin{array}{c}\boldsymbol{\psi_1(x,y,z)=x+y+z=C_1},\\ \boldsymbol{\psi_2(x,y,z)=x^2+y^2+z^2=C_2};\end{array}\right\}$$

po $y$ i $z$ dobijamo opšte rešenje. Izlažemo, dodatno, jedan postupak određivanja opšteg rešenja na osnovu sistema prvih integrala. Naime, polazeći od:

$$z=C_1-x-y$$

zamenom u $x^2+y^2+z^2=C_2$ dobijamo implicitnu vezu:

$$x^2+y^2+(C_1-x-y)^2=C_2,$$

odnosno kvadratnu jednačinu po $y$ u sledećem obliku:

$$2y^2+(2x-2C_1)y+(2x^2-2C_1x+C_1^2-C_2)=0$$

sa eksplicitnim $y$-rešenjem:

$$\boldsymbol{y=y(x)=\frac{C_1-x}{2}\pm\frac{\sqrt{-3x^2+2C_1x+(2C_2-C_1^2)}}{2}}$$

i iz $z=C_1-x-y$ nalazimo eksplicitno $z$-rešenje:

$$\boldsymbol{z=z(x)=C_1-x-y(x)=\frac{C_1-x}{2}\mp\frac{\sqrt{-3x^2+2C_1x+(2C_2-C_1^2)}}{2}}.$$

Sveukupno:

$$\left\{\begin{array}{l}\boldsymbol{y=y(x)=\dfrac{C_1-x}{2}\pm\dfrac{\sqrt{-3x^2+2C_1x+(2C_2-C_1^2)}}{2}},\\[2mm] \boldsymbol{z=z(x)=\dfrac{C_1-x}{2}\mp\dfrac{\sqrt{-3x^2+2C_1x+(2C_2-C_1^2)}}{2}};\end{array}\right\}$$

uz uslov da $-3x^2+2C_1x+(2C_2-C_1^2)>0$ za bar neko realno $x$, što obezbeđuje nepraznost domena za prethodne funkcije $y=y(x)$ i $z=z(x)$. □

**Zadatak 12.*** *Metodom prvih integrala rešiti sistem rešiti sistem diferencijalnih jednačina:*

(1) $$y_1' = \frac{y_1}{x},$$

(2) $$y_2' = -\frac{y_1}{y_2}.$$

**Rešenje.** Pretpostavimo da su:

$y_1=y_1(x), y_2=y_2(x)$ *rešenja polaznog sistema diferencijalnih jednačina.*

Prvi integral, u prvoj verziji, se može dobiti jednostavno iz (1) razdvajanjem promenljivih:

$$\frac{dy_1}{dx}=\frac{y_1}{x} \iff \frac{dy_1}{y_1}=\frac{dx}{x} \implies \ln|y_1|=\ln|x|+c_1 \iff \ln\left|\frac{y_1}{x}\right|=c_1 \iff \frac{y_1}{x}=C_1,$$

za neke konstante $c_1\in R$ i $C_1=\pm e^{c_1}\in R\backslash\{0\}$. Ovim smo odredili prvi integral (u prvoj verziji):

(3) $$\boldsymbol{\psi_1=\psi_1(x,y_1,y_2)=\frac{y_1}{x}}=C_1,$$

za neku realnu konstantu $C_1$. Prvi integral, u drugoj verziji, se ne dobija direktno iz (2), već je neophodno zapisati polazni sistem u simetričnom obliku i izvršiti sledeće transformacije:

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{dy_1}{dx}=f_1(x,y_1,y_2)=\dfrac{y_1}{x}\\[2mm] \dfrac{dy_2}{dx}=f_2(x,y_1,y_2)=-\dfrac{y_1}{y_2}\end{array}\right\} \iff \frac{dx}{1}=\frac{dy_1}{f_1(x,y_1,y_2)}=\frac{dy_2}{f_2(x,y_1,y_2)}$$

$$\iff \frac{dx}{1}=\frac{dy_1}{\frac{y_1}{x}}=\frac{dy_2}{-\frac{y_1}{y_2}}\Big/\cdot\frac{1}{xy_2}$$

$$\iff \frac{dx}{xy_2}=\frac{dy_1}{y_1y_2}=\frac{dy_2}{-xy_1}.$$

Na osnovu osobina proširenih proporcija važi:

$$\frac{y_1\cdot/dx}{y_1\cdot/xy_2}=\frac{x\cdot/dy_1}{x\cdot/y_1y_2}=\frac{dy_2}{-xy_1}\quad\Longrightarrow\quad\frac{y_1\,dx}{y_1xy_2}=\frac{x\,dy_1}{xy_1y_2}=\frac{dy_2}{-xy_1}$$

$$\Longrightarrow\quad\frac{\boldsymbol{y_1dx+xdy_1}}{y_1xy_2+xy_1y_2}=\frac{dy_2}{-xy_1}$$

$$\Longrightarrow\quad\frac{\boldsymbol{d\,(xy_1)}}{2xy_1y_2}=\frac{dy_2}{-xy_1}\,\Big/\cdot 2xy_1y_2$$

$$\Longrightarrow\quad d\,(xy_1)=\frac{2\,\cancel{x}\,\cancel{y_1}\,y_2}{-\cancel{x}\,\cancel{y_1}}\,dy_2$$

$$\Longrightarrow\quad d\,(xy_1)=-2\,y_2\,dy_2$$

$$\Longrightarrow\quad xy_1=-y_2^2+C_2,$$

za neku konstantu $C_2\in R$. Ovim smo odredili prvi integral (u drugoj verziji):

$$\boldsymbol{\psi_2=\psi_2(x,y_1,y_2)=xy_1+y_2^2}=C_2, \tag{4}$$

za neku realnu konstantu $C_2$.

Proverimo da su funkcije $\psi_1,\psi_2 : R^3\longrightarrow R$ funkcionalno nezavisne. Navedeno je ispunjeno jer je tačno:

$$\frac{D(\psi_1,\psi_2)}{D(y_1,y_2)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial\psi_1}{\partial y_1} & \frac{\partial\psi_1}{\partial y_2}\\ \frac{\partial\psi_2}{\partial y_1} & \frac{\partial\psi_2}{\partial y_2}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial y_1}\left(\frac{y_1}{x}\right) & \frac{\partial}{\partial y_2}\left(\frac{y_1}{x}\right)\\ \frac{\partial}{\partial y_1}\left(xy_1+y_2^2\right) & \frac{\partial}{\partial y_2}\left(xy_1+y_2^2\right)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{1}{x} & 0\\ x & 2\,y_2\end{vmatrix}=\frac{2\,y_2}{x}\neq 0.$$

Sistem prvih integrala (3) i (4) :

$$\left\{\begin{array}{c}\boldsymbol{\psi_1(x,y_1,y_2)=\frac{y_1}{x}=C_1},\\ \boldsymbol{\psi_2(x,y_1,y_2)=xy_1+y_2^2=C_2};\end{array}\right\}$$

određuje opšte rešnje po $y_1$ i $y_2$ koje se, u ovom slučaju, jednostavno određuje:

$$\left\{\begin{array}{c}\boldsymbol{y_1=y_1(x)=C_1x},\\ \boldsymbol{y_2=y_2(x)=\pm\sqrt{C_2-C_1x^2}};\end{array}\right\}$$

uz uslov da $C_2-C_1x^2>0$ za bar neko realno $x$, što obezbeđuje nepraznost domena za funkciju $y_2=y_2(x)$. □

**Literatura:** `https://dif.etf.bg.ac.rs/`

Beograd, 18.12.2022.

Prof. dr Branko J. Malešević
Elektrotehnički fakultet, Beograd
`http://home.etf.rs/~malesevic/`